UNIVERSIDAD LABORAL DE ALCALÁ DE HENARES

ESCUELA UNIVERSITARIA DE

INGENIERÍA TÉCNICA DE TELECOMUNICACIÓN

Especialidad: EQUIPOS ELECTRÓNICOS

1972-1975

SISTEMAS REALIMENTADOS DE CONTROL

SERVOSISTEMAS NO LINEALES

SERVOSISTEMAS NO LINEALES

INTRODUCCIÓN.-

Los sistemas lineales están caracterizados por ecuaciones integro-diferenciales lineales, es decir por ecuaciones de la forma

$$r(t) = A_v D^v c + A_{v-1} D^{v-1} c + \text{——} + A_1 D c + \text{——} + A_{-w} D^{-w} c$$

en donde $r(t)$ es la variable de entrada al sistema; $c(t)$ es la variable controlada y las $A_1 A_2$ — A_v y A_{-1} — A_{-w} son coeficientes constantes. Para resolver estos sistemas se hace uso de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales lineales.

Sin embargo, en los sistemas que se encuentran en la práctica algunos de estos coeficientes no son constantes y, en consecuencia, no son aplicables a ellos los métodos de resolución a que antes nos hemos referido. A estos sistemas se les denomina sistemas no lineales.

1. Tipos de no linealidades.

Ya hemos dicho que la no linealidad radica en la variación de algunos de los coeficientes de la ecuación diferencial.

Una primera división de las no linealidades viene dada por el hecho de que estos coeficientes A_i de la ecuación diferencial varían en función del tiempo $\underline{t}$ ó en función de la variable controlada $\underline{c}$.

Como ejemplo del primer tipo $(A_i = f(t))$ podemos citar las variaciones en la respuesta de un determinado componente (resorte, rozamiento, etc) en función del

envejecimiento del mismo.

Como ejemplo del segundo tipo, tenemos la saturación en un transistor, la "saturación" en un resorte, etc, componentes que intervienen en la cadena directa ó en la cadena de realimentación de un servosistema. En la fig 1 se indica la función de transferencia de un transistor en donde se pone de manifiesto que los incrementos de i_c respecto de i_b dependen del punto de funcionamiento del transistor (i_{CEQ}, i_{BEQ})

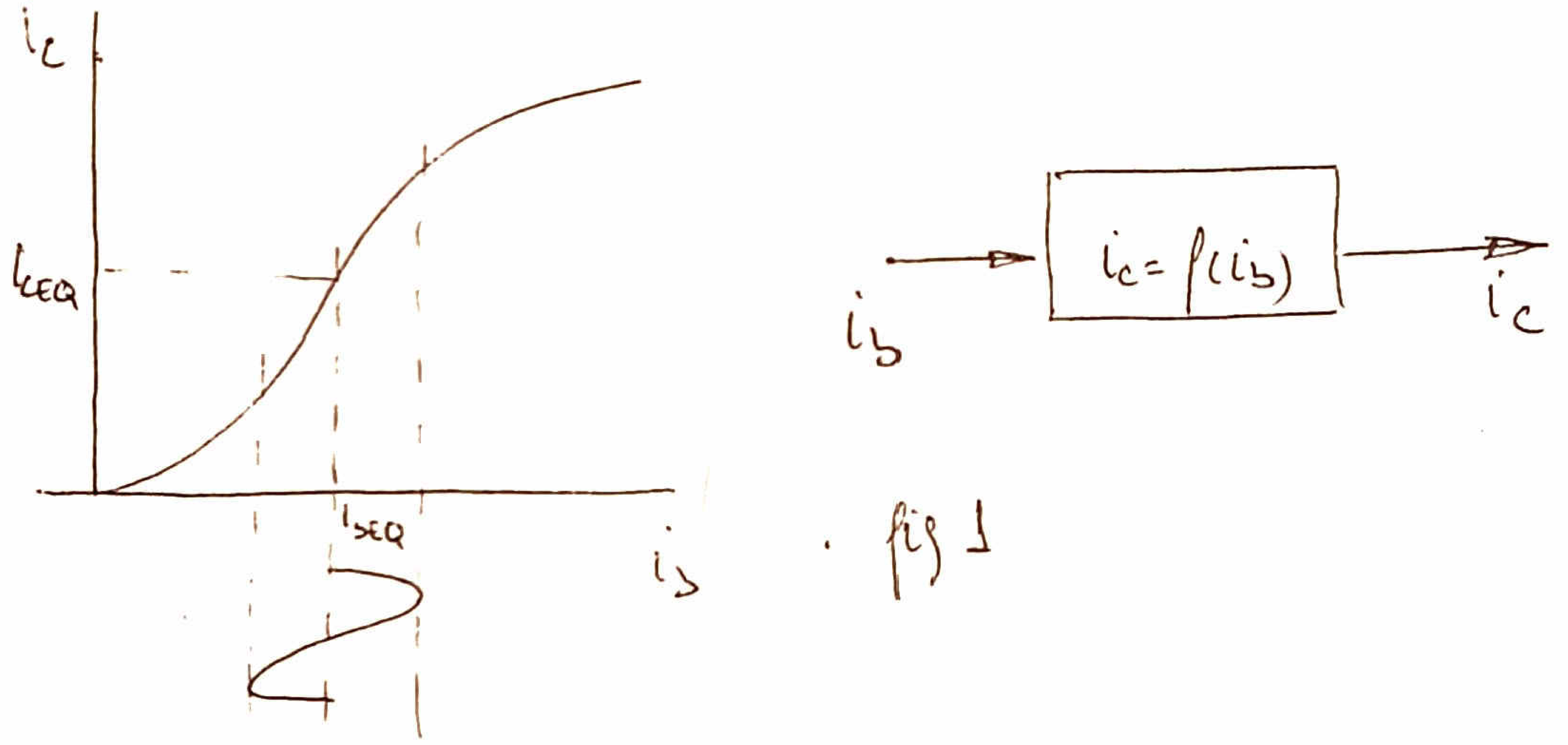

fig 1

Un sistema lineal estará caracterizado por una función de transferencia ($i_c = f(i_b)$ en la fig 1) en forma de línea recta con pendiente única. Así, si al ingreso del bloque indicativo del componente aplicamos una onda senoidal (analizis senoidal) a la salida tendremos otra onda senoidal de la misma frecuencia pero cuyo valor de pico ha sido multiplicado por la función de transferencia que coincide con la pendiente de la recta.

Sin embargo si el sistema es no lineal (como el de la fig 1), si al ingreso seguimos aplicando una sinusoide

de un cierto periodo, a la salida obtendremos una onda del mismo periodo que la del ingreso pero que un análisis armónico de Fourier nos revelará que está constituida por la suma de una sinusoide de la misma frecuencia que la del ingreso mas una serie infinita de armónicas de áquella.

2. Algunos fundamentos matemáticos para el estudio de los servosistemas no lineales.

Todo servosistema se puede representar por el diagrama de bloques simplificado de la fig 2.

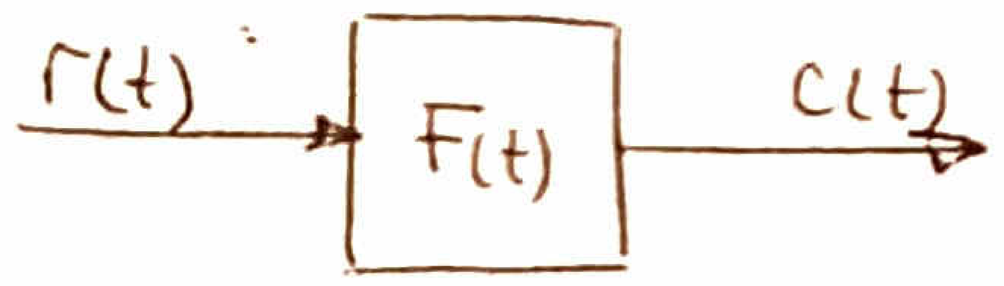

fig 2

En donde $r(t)$ es la variable independiente de entrada; $c(t)$ es la variable gobernada ó de salida y $F(t)$ es la función de transferencia del bloque en el dominio del tiempo y que se define como la respuesta del bloque a una función de ingreso en forma de impulso.

Podemos obtener la respuesta del sistema 2 para cualquier función de entrada, bien en el dominio del tiempo, bien en el dominio de la frecuencia (por aplicación de las transformadas de Laplace).

Nosotros haremos primero un estudio en el dominio del tiempo y lo extenderemos posteriormente al dominio frecuencial.

La señal de respuesta $c(t)$ del sistema de la fig 2 ante una entrada $r(t)$ viene expresada por

$$c(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) = c_1(t) + c_2(t) + \text{———} + c_n(t) \qquad (1)$$

La ecuación (1) nos indica que la función $c(t)$ de salida es igual a la suma de una serie infinita de términos, cada uno de los cuales viene definido por

$$c_n(t) = \underbrace{\iiint\text{---}\int_{-\infty}^{\infty}}_{n\ \text{veces}} K_n(z_1 z_2 \text{—} z_n) \prod_{k=1}^{n} r(t - z_k)\, dz_k \qquad (2)$$

donde a $K_n(z_1 z_2 \text{—} z_n)$ se les llama Kernels de Volterra y a la serie así definida se le llama serie de Volterra.

Por tanto:

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(z_1)\, r(t - z_1)\, dz_1 + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_2(z_1 z_2)\, r(t - z_1)\, r(t - z_2)\, dz_1 dz_2 + \text{———}$$

$$+ \text{———} + \underbrace{\iiint\text{———}\int_{-\infty}^{\infty}}_{n\ \text{veces}} K_n(z_1; z_2 \text{—} z_n) \prod_{k=1}^{n} r(t - z_k)\, dz_k \qquad (3)$$

La ecuación (3) constituye la expresión generalizada de la salida de un sistema en general, que podemos poner también en la forma.

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(z_1)\, r(t - z_1)\, dz_1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n(t) \qquad (4)$$

en donde $\sum_{n=2}^{\infty} c_n(t)$ se puede obtener de (2).

En un sistema lineal se verifica que

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n(t) = 0 \qquad (5)$$

~~ya que~~ por lo que

$$K_n(z_1 z_2 - z_n) = 0 \quad \text{para } n \geq 2 \qquad (6)$$

y

$$K_1(z_1) = F(z_1) \qquad (7)$$

Por tanto

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z_1)\, r(t - z_1)\, dz_1 \qquad (8)$$

que constituye una expresión mucho más sencilla para estudiar los sistemas lineales. (La expresión 8 constituye sencillamente la integral de convolución ya estudiada por el alumno).

Encontramos por tanto que la diferencia entre un sistema lineal y otro no lineal desde el punto de vista matemático radica en el cálculo de

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n(t) \qquad (9)$$

Este cálculo es extremadamente dificultoso al tener que efectuar convoluciones múltiples de las funciones implicadas. Por tanto, todos los esfuerzos se concentran en aproximar el sistema no lineal a uno lineal, es decir a hacer que

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n(t) = 0$$ que es lo mismo que hacer.

$$K_n(z_1 z_2 - z_n) = 0 \quad \text{para } n \geq 2. \qquad (10)$$

En esto consisten todas las técnicas de linealización de

la función de transferencia F(t). Estas técnicas incluyen la aproximación a la curva real por tramos lineales sucesivos, análisis del sistema para pequeños valores de la variable (en el límite, la curva se puede aproximar por una recta en la dirección de su tangente en cualquiera de sus puntos) etc, que tienden a que se verifique la Ec. 10.

A fin de enlazar lo dicho hasta ahora con experiencias ó conocimientos ya adquiridos, citaremos el siguiente ejemplo:

La modulación de amplitud es un proceso lineal, en donde la expresión modulada es

$$f_c(t) = K\cos w_c t + \frac{K}{2} m \cos(w_c + w_m)t + \frac{K}{2} m \cos(w - w_c)t \qquad (11)$$

en donde podemos apreciar la aparición de sólo dos bandas laterales respecto a la portadora w_c.

Sin embargo, la modulación de frecuencia es un proceso no lineal en donde la expresión de la señal modulada de salida es

$$C(t) = J_0(\beta)\cos w_c t \pm J_1(\beta)\left[\cos(w_c - w_m)t - \cos(w_c + w_m)t\right] + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (-1) J_n(\beta)\left[\cos(w_c - n w_m)t - \cos(w_c + n w_m)t\right] \qquad (12)$$

en donde $J_0, J_1 — J_n$ son las funciones de Bessel; β el índice de modulación; w_m la pulsación de la señal moduladora y w_c la pulsación de la portadora.

Si comparamos la Ec (12) con la (4) podemos stablecer las siguientes analogías:

$$J_0(\beta)\cos w_c t - J_1(\beta)\left[\cos(w_c - w_m)t - \cos(w_c + w_m)t\right] \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau_1)\, r(t-\tau_1)\, d\tau_1 \quad (13)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1) J_n(\beta)\left[\cos(w_c - n w_m)t - \cos(w_c + n w_m)t\right] \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} C_n(t) \quad (14)$$

La Ec 13 nos proporciona la parte lineal de la señal modulada en frecuencia, coincidente con la señal obtenida en la modulación de amplitud, que es lineal.

La Ec. 14 nos proporciona la parte no lineal de la FM en donde las funciones de Bessel tienen el mismo significado que los Kernels de Volterra, ya definidos.

Si en la ecuación (4) aplicamos a ambos términos el concepto de transformadas, tenemos

$$\mathcal{L}\left[C(t)\right] = \mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau_1)\, r(t-\tau_1)\, d\tau_1\right] + \mathcal{L}\left[\sum_{n=2}^{\infty} C_n(t)\right] \quad (15)$$

$$C(p) = G_1(p)\, R(p) + \mathcal{L}\left[\sum_{n=2}^{\infty} C_n(t)\right] \quad (16)$$

donde $G_1(p) = \mathcal{L}\left[K_1(t)\right]$, representa la transformada de Laplace ~~del~~ ~~y~~ de la parte lineal del sistema.

Este análisis en el dominio de las frecuencias sugerido por la ec-15 tropieza con procesos matemáticos muy engorrosos, tales como el de obtener la transformada de Laplace de integrales de convolución múltiples.

Es por ello por lo que para el estudio aproximado de un sistema no lineal haremos uso de las "funciones generalizadas", definiéndolas como la función de transferencia de un sistema lineal aproximadamente equivalente al original. Esta definición sólo es aplicable en el caso de que la señal de entrada al sistema sea sinusoidal.

Sabemos que a la salida de un sistema no lineal a cuya entrada hayamos aplicado una señal sinusoidal obtenemos una onda con el mismo periodo que a la entrada pero que un análisis por Fourier nos indica que contiene muchos armónicos, además del fundamental. La función de transferencia de la parte lineal del sistema sería la correspondiente al armónico fundamental. Por tanto:

La función de transferencia generalizada para nolinealidades simétricas se define como la transformada de Laplace de la componente fundamental de la salida dividida por la transformada de Laplace de la entrada sinusoidal.

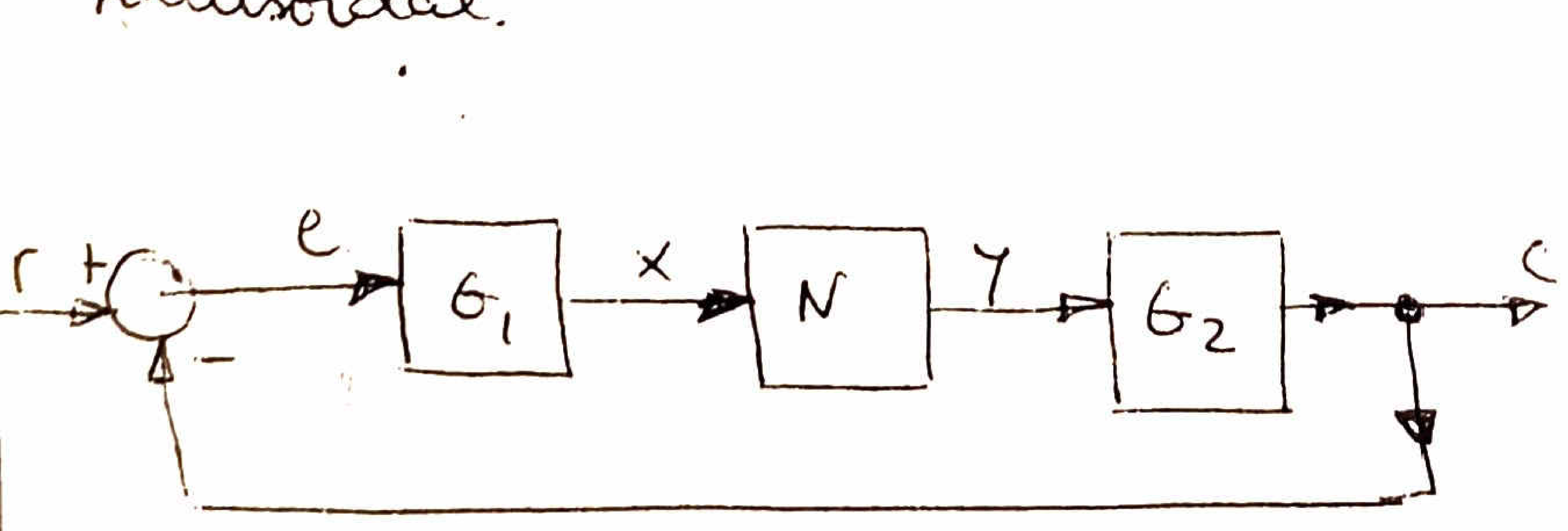

fig 3

En la fig 3 se indica un sistema de control que contiene un elemento N no lineal y otros G_1 y G_2 lineales.

En función de la fig 3, la función generalizada del elemento N :

$$N(p) = \frac{Y_1(p)}{X(p)} = \frac{Y_1(j\omega)}{X(j\omega)} \qquad (17)$$

(Podemos usar la transformada de Laplace ó la de Fourier para el análisis sinusoidal).

El cálculo de la función generalizada requiere un análisis de Fourier para obtener la componente fundamental de la salida. La entrada a la no linealidad está dada por

$$x(t) = X \operatorname{sen} \omega t. \qquad (18)$$

La salida expresada en serie de Fourier, es:

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos \omega_2 t + \text{——} + B_1 \operatorname{sen} \omega t + \text{——} \qquad (19)$$

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega t + B_n \operatorname{sen} n\omega t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \operatorname{sen}(n\omega t + \theta_n)$$

en donde

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos n\omega t \, d(\omega t)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \operatorname{sen} n\omega t \, d(\omega t)$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \qquad \phi_n = \operatorname{arctg} \frac{A_n}{B_n} \qquad (20)$$

Este estudio de la función generalizada sólo sirve en el caso de que la señal de entrada al bloque no lineal sea sinusoidal ó casi sinusoidal de lo cual se deduce que una simplificación en los métodos de cálculo conseguidos por tal función repercute en una perdida de la generalidad.
Para un método mas exacto hay que acudir a resolver ecuaciones tales como la Ec. 3.

Ejemplo de obtención de una función generalizada..

- Tipo de no linealidad: Saturación

- La fig 4 indica la representación de la saturación y la señal de salida obtenida con una entrada sinusoidal.

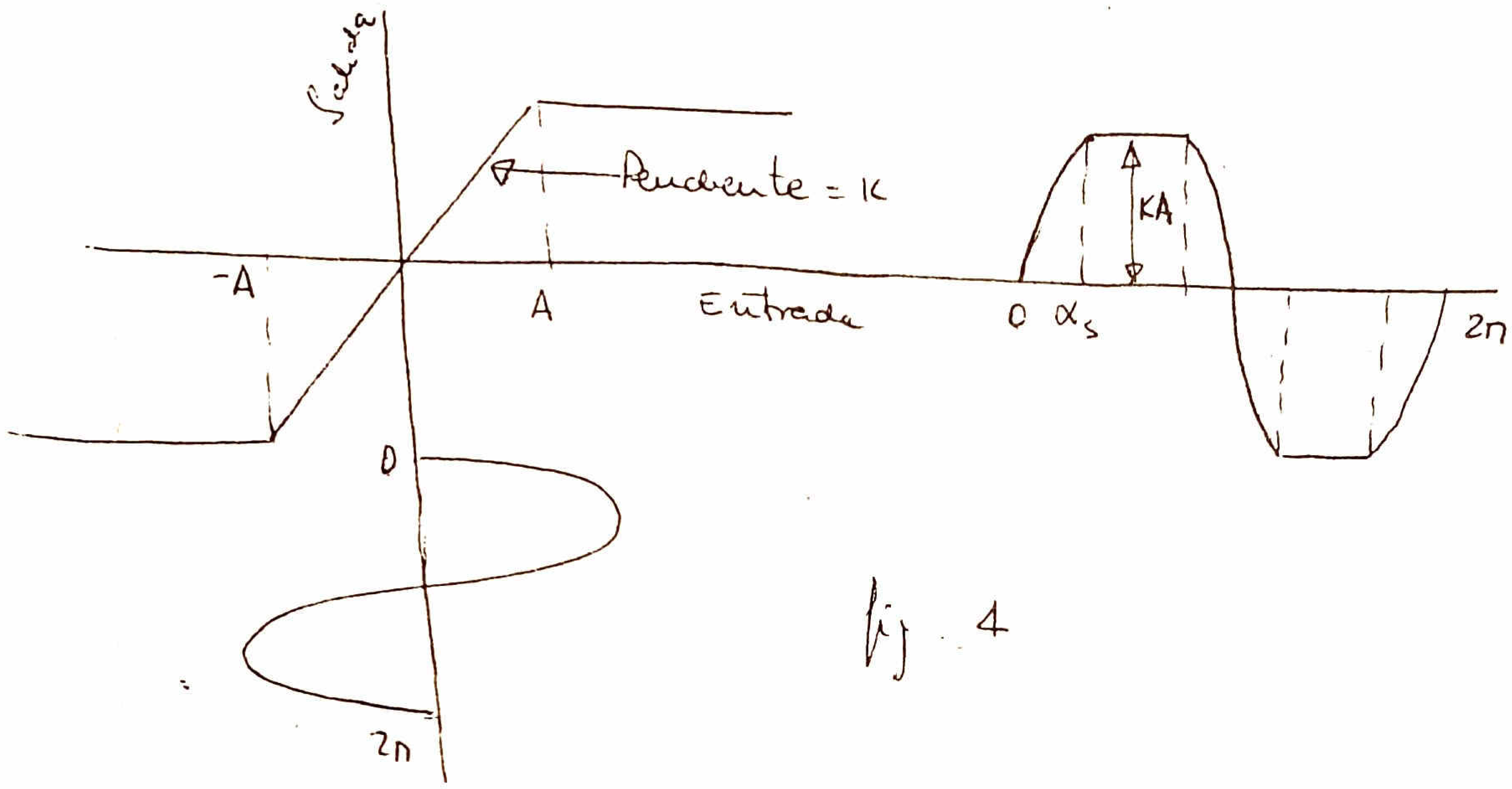

fig. 4

La entrada es

$$x = X \operatorname{sen} \omega t.$$

La salida del sistema es:

$$y = Kx \operatorname{sen} \omega t \qquad 0 \le \omega t \le \alpha \;;\quad \pi-\alpha_s \le \omega t \le \pi+\alpha_s \;;\quad 2\pi-\alpha_s \le \omega t \le 2\pi$$

$$y = KA \qquad \alpha_s \le \omega t \le \pi-\alpha_s \;;\quad \pi+\alpha_s \le \omega t \le 2\pi-\alpha_s$$

(21)

Por tanto, los coeficientes de la serie vienen dados por

$$Y_{K_1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t) \operatorname{sen} K_1 \omega t \, d(\omega t) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} y(t) \operatorname{sen} K \omega t \, d(\omega t) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\alpha_s} KX \operatorname{sen} \omega t . \operatorname{sen} K_1 \omega t \, d(\omega t) + \frac{4}{\pi}\int_{\alpha_s}^{\frac{\pi}{2}} KA \operatorname{sen} K_1 \omega t \, d(\omega t) \qquad (22)$$

$$Y_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\alpha_s} KX \operatorname{sen} \omega t . \operatorname{sen} K_1 \omega t \, dt + \frac{4}{\pi}\int_{\alpha_s}^{\pi/2} KA \operatorname{sen} K_1 \omega t \, d(\omega t) =$$

$$= KX\left(\frac{2\alpha_s}{\pi} + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha_s}{\pi}\right)$$

ya que

$$\alpha_s = \text{arc sen} \frac{A}{X} \qquad (23)$$

La función generalizada s, por tanto

$$N = \frac{Y_1}{X} = K\left(\frac{2\alpha_s}{\pi} + \frac{\text{sen } 2\alpha_s}{\pi}\right) \qquad (24)$$

y la función generalizada adimensional S:

$$\frac{N}{K} = \frac{2\alpha_s}{\pi} + \frac{\text{sen } 2\alpha_s}{\pi} \qquad (25).$$

La función generalizada así hallada sería la función de transferencia del sistema lineal equivalente a una nolinealidad producida por la saturación.

Con otros tipos de nolinealidades se procedería en idéntica forma.

<u>Estudio de la stabilidad en sistemas no lineales</u>

Para este estudio bastará leer los apartados 18-6, 18-7, 18-8 y 18-9 del D'Azzo-Houpis.

<u>Conclusiones</u> - El método de aproximación de la función de transferencia generalizada proporciona un método práctico para el análisis de sistemas no lineales.

Sin embargo su uso esta restringido a los siguientes casos.

1. La entrada al bloque no lineal debe ser sinusoidal ó casi sinusoidal.

2.- El sistema debe prever una gran atenua-

ción para los armónicos, a partir del segundo armónico, generados en el proceso no lineal, pues si ello no ocurre, al no estar englobados estos armónicos en la definición de la función generalizada, la respuesta del sistema se apartará considerablemente de la respuesta teórica.

Este último inconveniente se puede resolver, definiendo funciones generalizadas que, de alguna manera, tengan en cuenta esta no atenuación de los armónicos no fundamentales. Así definimos la función de transferencia generalizada eficaz como

$$N_{rms} = \frac{\left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [y(t)]^2 \, d\omega t \right\}^{1/2}}{X} \qquad (26)$$

en donde se ha definido en función del valor eficaz de una onda sinusoidal única que tenga la misma potencia que la señal de salida del proceso no lineal. $\left[P = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [y(t)]^2 \, d\omega t \right]$.

Otra función generalizada que es posible definir se basa en la anterior. En esta consideramos sólo el valor eficaz de una señal sinusoidal cuya potencia fuera equivalente a la del primer y tercer armónico de la onda de salida del proceso no lineal

$$N_{corr} = \frac{\left(A_1^2 + B_1^2 + A_3^2 + B_3^2\right)^{1/2}}{X} \qquad (27)$$

A esta última función se la llama función generalizada corregida.

Es claro que, con análisis sinusoidal, nos aproximaremos tanto más a la realidad cuanto más armónicos formen parte en la definición de función generalizada, lo cual produce una ulterior complicación matemática.

NOTA.-

Para una ulterior lectura se recomienda el capítulo 18 del D'Azzo Houpis.